ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 9-10-2016

ΤΜΗΜΑ : Γ_6 , O_2

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΘΕΜΑ 1$^{\mathrm{O}}$

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος .

1. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με $f(x_0)=0$, τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

Μονάδες 4

2. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $\Delta=[\alpha,\beta]$,τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[M,m]$ με $m=f(\alpha)$ και $M=f(\beta)$.

Μονάδες 4

3. Αν για κάθε $x \in (\sqrt{5},3)$ ισχύει $g(x)\le f(x)\le h(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2} h(x)=\lambda$, τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lambda$.

Μονάδες 4

4. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της .

Μονάδες 4

5. Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 3x-5 & ,\text{αν} \quad x<2 \\ x^2-3 & ,\text{αν} \quad x>2 \end{cases}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0=2$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2^{O}

Α . Να υπολογιστούν τα όρια (αν υπάρχουν) :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2-\sqrt{x^2-x+5})$

Μονάδες 5

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x^2-5x+6}$

Μονάδες 5

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x+4}-2}$

Μονάδες 5

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2|x-3|+5|1-x|-10}{x^2-9}$

Μονάδες 5

Β . Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=k\in\mathbb{R}$ και ισχύει

$f^3(x)+f(x)\cdot\eta\mu^2 x=2\cdot x^2\cdot\eta\mu x,\quad x\in\mathbb{R}$ να βρεθεί το k .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^{o}

A. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+\alpha\cdot \sigma\upsilon\nu(\pi\cdot x), & x\le 1 \\ \alpha\cdot x^2-3\cdot x+2\cdot\beta, & 1<x\le 2 \\ \ln(x-1)+\eta\mu(\pi\cdot x)+\beta-1, & x>2 \end{cases}$$

1. Να βρεθούν οι τιμές των α και β ώστε η f να είναι συνεχής .

Μονάδες 5

2. Για $\alpha=\beta=1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

Μονάδες 5

B. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο R για την οποία ισχύει

$x\cdot f(x)=x+\alpha-\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\neq 0$.

1. Να δειχθεί ότι $\alpha=1$.

Μονάδες 5

2. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

Μονάδες 5

3. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=x$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\pi)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

Α. Έστω η συνάρτηση $f : [0\ ,\ 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα για την οποία ισχύει $f(0) = e^{-1}$, $f(1) = 5$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 10

Β. Οι συναρτήσεις $f\ ,\ g : [\alpha\ ,\ \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς , έχουν σύνολο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $2 \cdot f(\xi) = g(f(\xi)) + g(\xi)$.

Μονάδες 15

Καλή επιτυχία

Κυριακή 9 Οκτωβρίου 2016

Γραπτή δοκιμασία στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Θέμα Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

Μονάδες 10

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α4. Σημειώστε ποιές απο τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές και ποιές Λάθος:

α. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ισχύει $f(a)f(b) > 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (a, b).

γ. Κάθε συνεχής συνάρτηση f σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

δ. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Δ, λέμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in\Delta$.

ε. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Β1. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$, με $a > 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ$\in (a, b)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f(\xi)}{\xi} = \frac{a}{a - \xi} + \frac{b}{b - \xi}$$

Β2. Να εξετάσετε αν η παρακάτω συνάρτηση είναι συνεχής:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2x}{x} & , x < 0 \\ \\ 3x + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

.

Μονάδες 25

Θέμα Γ

Έστω f συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο διάστημα $[0,4]$ με $f(4) = 1$ και $f(0) = 7$.

α. Να βρεθεί το είδος μονοτονίας της f.

β. Αν $a \in [1,7]$, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $[0,4]$.

γ. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0,4)$ τέτοιος ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(1) + 3f(2) + 5f(3)}{9}$$

Μονάδες 25

Θέμα Δ

Α. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες συνδέονται με την ιδιότητα:

$$f^2(x) + g^2(x) + \eta\mu^2 x = 2x \cdot f(x) + 2\eta\mu x \cdot g(x).$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξτε ότι f συνεχής στο 0.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(f(x)) = 9x+8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

β. Να εκφράσετε την f^{-1} ως συνάρτηση της f.

γ. Να δείξτε ότι $f(9x + 8) = 9f(x) + 8$.

δ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Μονάδες 25

Να απαντήσετε σε ΌΛΑ τα θέματα

Καλή επιτυχία!

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΜΗΜΑΤΑ: $Γ_2$, $Γ_4$, $Γ_5$
9/10/2016

ΘΕΜΑ 1ο

Να συμπληρώσετε με σωστό «Σ» ή λάθος «Λ» τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν για τις f, g ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ell\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

ii. Αν $f(x)\geq g(x)$ κοντά στο σημείο x_0 και υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, τότε ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geq\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

iii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, τότε $f(x)=g(x)$ κοντά στο σημείο x_0..

iv. Ισχύει ότι αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε και μόνο τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

v. Αν f άρτια και $\lim\limits_{x\to \alpha}f(x)=\beta$, τότε $\lim\limits_{x\to -\alpha}f(x)=\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να υπολογιστούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-5x+6|}{x^2-4x+4}$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{συνx-1}$

iv. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{|-2x^3+x^2-1|-ημx}{|x^3-2x|+2016}$

v. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{e^{2x}-3^x+1}-e^x\right)$

vi. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+1}+2x\right)\cdot\left(ημ\dfrac{1}{x}\right)\right)$

(Μονάδες 18)

Β. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\sqrt{x+1}-1\right)g(x)\right)=3$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu 2x}\right)=2$, τότε να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right)$.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 3ο

i. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι: $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\eta\mu 2x}{2x+\sigma\upsilon\nu x-1}$.

(Μονάδες 12)

ii. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^2+\beta}{\sqrt{x}-1}, & \alpha\nu\ x>1\\ x^2+\beta x+4, & \alpha\nu\ x\le 1\end{cases}$, τότε να βρείτε τα $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4ο

i. Να βρείτε τις τιμές των α, β $\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x-2}+\alpha x+\beta\right)=5$

(Μονάδες 09)

ii. Αν f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, τότε:

α) Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(f(x))}{x}$. (Μονάδες 08)

β) Αν δίνεται επιπλέον ότι η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, να βρεθεί ο τύπος της. (Μονάδες 08)

Να έχετε επιτυχία!