

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

4-12-2016

ΤΜΗΜΑ:Γ<sub>6</sub>, Ο<sub>2</sub>

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:ΚΑΡΑΝΑΣΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

## ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A .** Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό .

**Μονάδες 10**

**B .** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle .

**Μονάδες 5**

**Γ .** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη **Σωστό** , αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λάθος .

- 1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\phi x$  . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R_1 = R - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$  και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} .$$

**Μονάδες 2**

- 2.** Αν μία συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  .

**Μονάδες 2**

3. Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις  $f, g$  παραγωγίσιμες στο  $x_0$  ισχύει

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0) .$$

**Μονάδες 2**

4. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$  , παραγωγίσιμη στο

$$(0,1) \text{ και } f'(x) \neq 0 \text{ για όλα τα } x \in (0,1) , \text{ τότε } f(0) \neq f(1) .$$

**Μονάδες 2**

5. Αν η συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(\alpha) < f(\beta)$  , τότε

$$\text{υπάρχει } x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_0) > 0 .$$

**Μονάδες 2**

$\Delta$  . Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

1.  $f(x) = 3 \cdot x^6 - 2 \cdot x^3 + 5 \cdot x - 1$

**Μονάδες 1**

2.  $f(x) = 7 \cdot e^x + 2 \cdot \ln x - 6 \cdot \sin x$

**Μονάδες 1**

3.  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

**Μονάδες 1**

4.  $f(x) = x \cdot \eta\mu x - e^x \cdot (2 \cdot x^2 - 4)$

**Μονάδες 1**

5.  $f(x) = \sqrt{\eta\mu(2 \cdot x^4)}$

**Μονάδες 1**

## ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

A. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 4 \cdot x^2 - \alpha^2 \cdot x, & \text{αν } x \leq 1 \\ 7 \cdot x - \alpha - 3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

1. Να προσδιορίσετε τις τιμές του  $\alpha$  για τις οποίες η  $f$  είναι συνεχής στο  $x = 1$ .

**Μονάδες 5**

2. Για  $\alpha = 0$  ή  $\alpha = 1$  να εξετάσετε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x = 1$

**Μονάδες 5**

B. Έστω συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύουν

$$f(1) = f(2) \text{ και } 2 \cdot f'(1) = f'(2).$$

Αν  $g(x) = \begin{cases} f(2 \cdot x) & , x \geq 1 \\ f(4 \cdot x - 3) & , x < 1 \end{cases}$  να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι

παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $[0, 2]$

και ισχύουν  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 1$ . Να δείξετε ότι :

1. Η εξίσωση  $f'(x) = 1$  έχει ρίζα στο  $(0, 2)$ .

**Μονάδες 8**

2. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο διάστημα  $(0, 2)$  στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 8**

3. Υπάρχει  $\xi \in (0, 2)$  τέτοιο ώστε  $f''(\xi) < 0$ .

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 4 \cdot x^3 - 2 \cdot \kappa \cdot x + \kappa - 1$ . Να δείξετε ότι :

1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 8**

2. Η εξίσωση  $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(x_0, 2)$ .

**Μονάδες 8**

3. Αν  $\kappa > 1$ , τότε υπάρχει  $\xi \in (0, x_0)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) < 0$ .

**Μονάδες 9**

*Καλή επιτυχία*

Κυριακή 4 Δεκεμβρίου 2016  
Γραπτή δοκιμασία στα  
Μαθηματικά Κατεύθυνσης

**Θέμα Α**

**A1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει:  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

Μονάδες 8

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$  του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

**A3.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα *Rolle* του διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 3

**A4.** Σημειώστε ποιές απο τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές και ποιές Λάθος:

- α. Έστω  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $f'(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνήσιως μονότονη στο  $\Delta$ .
- β. Έστω  $f$  παραγωγίσιμη στο  $[a, b]$  και  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση  $a$ , τότε  $f'(a) \geq 0$ .
- γ. Κάθε συνεχής συνάρτηση  $f$  σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- δ. Μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$  και ισχύει  $f(a)f(b) > 0$ , τότε η εξίσωση  $f(x) = 0$  δεν έχει ρίζα στο διάστημα  $(a, b)$ .
- ε. Αν  $f, g$  παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f(x) > g(x)$ , για κάθε  $x \in \Delta$ , τότε  $f'(x) > g'(x)$ , για  $x \in \Delta$ .

Μονάδες 10

**Θέμα Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6ax + \beta$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha, \beta$  πραγματικοί. Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 = -2$ , το  $f(-2) = 98$ .

α. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -6$  και  $\beta = 54$ .

Μονάδες 6

β. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 9

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα  $(-1, 2)$ .

Μονάδες 7

### Θέμα Γ

Γ1 Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει:

$$2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρεθεί ο τύπος της  $f(x)$ , αν  $f(0) = 1$ .

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την  $f'(x)$  και το πρόσημό της.

Μονάδες 6

Γ2 Δίνεται η συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  με  $f(\alpha) = \alpha$  και  $f(\beta) = \beta$ . Να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$ , ώστε  $f(\xi) = \alpha + \beta - \xi$ .

Μονάδες 6

β. υπάρχουν  $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ , με  $x_1 \neq x_2$ , τέτοια ώστε  $f'(x_1)f'(x_2) = 1$ .

Μονάδες 8

### Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$ .

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \ln x$  στο σημείο  $A(a, \ln a)$  με  $a > 0$  και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $h(x) = e^x$  στο σημείο  $B(b, e^b)$  με  $b \in \mathbb{R}$  ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός  $a$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

Μονάδες 9

δ. Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g$  και  $h$  έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

Μονάδες 3

Να απαντήσετε σε ΌΛΑ τα θέματα

Καλή επιτυχία!

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**4/12/2016**  
**ΤΜΗΜΑ: Γ<sub>2</sub>, Γ<sub>4</sub>**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A)** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο  $x_0$ . Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.
- B)** Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.
- Γ)** Να συμπληρώσετε με Σωστό «Σ» ή Λάθος «Λ» τις παρακάτω προτάσεις:
- i.** Αν  $f$  ορισμένη στο  $[a, \beta]$  με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$  και  $f(a)+f(\beta)=0$  τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ .
  - ii.** Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει πάντα ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .
  - iii.** Αν για την  $f$  υπάρχει το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ , τότε ισούται με  $f'(x_0)$ .
  - iv.** Αν μία συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .
  - v.** Αν μια περιττή συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , τότε η  $f'$  είναι άρτια.

(Μονάδες 10+5+10)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Αν η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x + 1 & , x \leq 1 \\ \sqrt{5 - x^2} & , x > 1 \end{cases}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x=1$  τότε :

- i.** Να αποδείξετε ότι  $a = -\frac{3}{2}$  και  $\beta = \frac{5}{2}$ .
- ii.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-5h)}{h}$ .
- iii.** Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  που είναι παράλληλη προς την ευθεία  $y = -2x$ .

(Μονάδες 10+7+8)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και συνεχής στο  $[a, \beta]$  με σύνολο τιμών το  $[a, \beta]$  με  $0 < a < \beta$  και  $f(a), f(\beta) \in (a, \beta)$ . Να δείξετε ότι:

- i.** Η συνάρτηση  $f$  δεν είναι 1-1.
- ii.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in [a, \beta]$  τέτοιο ώστε  $f(f(x_0)) = x_0$ .
- iii.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in (a, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f(x_1) = \sqrt{a\beta}$ .
- iv.** Υπάρχει  $\xi \in [a, \beta)$  ώστε να ισχύει:  $f^2(\xi) + \xi \cdot f(\xi) = 2\xi^2$

(Μονάδες 6+7+6+6)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  παραγωγίσιμες στο  $(0, +\infty)$  για την οποίες ισχύει η σχέση  $f(x) - \ln x = g(x) + e^x - \frac{1}{x}$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , τότε να δείξετε ότι :

- i.** Οι γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.
- ii.** Οι γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  δεν έχουν στο κοινό σημείο τους κοινή εφαπτομένη.
- iii.** Αν επιπλέον ισχύει ότι  $f$  είναι συνάρτηση 1-1 με  $f^{-1}$  παραγωγίσιμη και η ευθεία  $y = ex + 1$  είναι εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $x=1$ , τότε:
  - α.** Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_g$  στο  $x=1$ .
  - β.** Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_{f^{-1}}$  στο  $x=e+1$

(Μονάδες 8+7+10)

**Να έχετε επιτυχία!**

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΤΜΗΜΑ: Γ<sub>5</sub>**  
**4/12/2016**

**ΘΕΜΑ 1°**

- A)** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο  $x_0$ . Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.
- B)** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
- Γ)** Να συμπληρώσετε με Σωστό «Σ» ή Λάθος «Λ» τις παρακάτω προτάσεις:
- i.** Αν  $f$  ορισμένη στο  $[a, \beta]$  με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$  και  $f(a)+f(\beta)=0$  τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ .
  - ii.** Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει πάντα ρίζα στο  $\mathbb{R}$
  - iii.** Αν μία συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε δεν είναι ούτε συνεχής στο  $x_0$ .
  - iv.** Αν μια περιττή συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , τότε η  $f'$  είναι άρτια.
  - v.** Αν  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1.

(Μονάδες 10+5+10)

**ΘΕΜΑ 2°**

Αν η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x + 1 & , x \leq 1 \\ \sqrt{5-x^2} & , x > 1 \end{cases}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x=1$  τότε :

- i.** Να αποδείξετε ότι  $a = -\frac{3}{2}$  και  $\beta = \frac{5}{2}$ .
- ii.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-5h)}{h}$ .
- iii.** Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  που είναι παράλληλη προς την ευθεία  $y = -2x$ .

(Μονάδες 10+7+8)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο  $[a, \beta]$  με σύνολο τιμών το  $[a-1, \beta+1]$  με  $0 < a < \beta$  και  $f(a) = a$  και  $f(\beta) = \beta$ . Να δείξετε ότι:

- i.** Η συνάρτηση  $f$  δεν είναι 1-1.
- ii.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο  $f(x_0) = \sqrt{a\beta}$ .
- iii.** Υπάρχουν δύο τουλάχιστον  $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$  ώστε  $\frac{\sqrt{a}}{f'(\xi_1)} + \frac{\sqrt{\beta}}{f'(\xi_2)} = \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$
- iv.** Υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε σημείο  $(\xi_0, f(\xi_0))$  με  $\xi_0 \in (a, \beta)$  η οποία διέρχεται από το  $(0, 0)$ .

(Μονάδες 6+7+6+6)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  παραγωγίσιμες στο  $(0, +\infty)$  για την οποίες ισχύει η σχέση  $f(x) - \ln x = g(x) + e^x - \frac{1}{x}$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , τότε να δείξετε ότι :

- i.** Οι γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.
- ii.** Οι γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  δεν έχουν στο κοινό σημείο τους κοινή εφαπτομένη.
- iii.** Αν επιπλέον ισχύει ότι  $f$  είναι συνάρτηση 1-1 με  $f^{-1}$  παραγωγίσιμη και η ευθεία  $y = ex + 1$  είναι εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $x=1$ , τότε:
  - α.** Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_g$  στο  $x=1$ .
  - β.** Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_{f^{-1}}$  στο  $x=e+1$

(Μονάδες 8+7+10)

**Να έχετε επιτυχία!**