ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδειχθεί ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα [α,β] και G είναι μια αρχική της f , τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού ελαχίστου μιας συνάρτησης f σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***Σωστό,*** αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > \lim_{x \to x_0} g(x)$, τότε $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 2

β) Αν f συνεχής στο [α,β] με f(α) < 0 και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε f(ξ)=0, τότε κατ' ανάγκη f(β) > 0.

Μονάδες 2

γ) Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

Μονάδες 2

δ) Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, τότε μεταξύ δύο ριζών της f υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f' .

Μονάδες 2

ε) Αν για την συνεχή συνάρτηση f στο [α,β] ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|\,dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\alpha}{e^{\beta x}-1}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 \quad , & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι α = 0 και β =1.

Μονάδες 6

Β2. Να δείξετε ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Δείξτε ότι ορίζεται η σύνθεση $f \circ f$ στο $\mathbb{R}$ και βρείτε το $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(f \circ f)(x)}{x}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει $xf''(x)=4x-f'(x)$ για κάθε $x > 0$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1,f(1))$ έχει εξίσωση $y = 4x - 3$, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2+2\cdot\ln x$, $x>0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση x_0 στο διάστημα $(0,+\infty)$, όπου $0 < x_0 < 1$.

Μονάδες 6

Γ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

Γ4. Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, τον άξονα xx΄και την ευθεία x = 1, να δείξετε ότι $E=\dfrac{2{x_0}^3+6x_0-5}{3}$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της συνάρτησης f του ερωτήματος **Γ2**.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ και για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot f(x+2)+\eta\mu 3x}{\sqrt{x+1}-1}=20$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+1)-f(2)}{x-1}=3$
- Ισχύει η σχέση $xf(x)\geq 3x-x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2,f(2))$ έχει εξίσωση y = 3x+1.

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(0)=3$ και ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία y = 5.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,2)$ ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=1$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $f(x)\leq 2x+3$ για κάθε $x\in[0,2]$.

Μονάδες 5

Να έχετε επιτυχία!